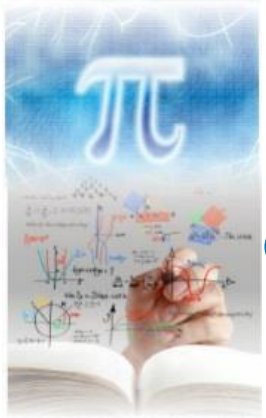
PITAGORAS
ACADEMIA

ÁLGEBRA

Profesor
Freddy Ávalos C

MATRICES-DETERMINANTES



DEFINICION- OPERACIONES-TEOREMAS

MATRICES

MATRIZ

Una matriz es un arreglo rectangular de elementos distribuidos en filas y columnas.

Ejemplos:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 1 \\ \pi & \sqrt{5} & 7 & -9 \\ 4 & -2 & 5 & -7 \end{bmatrix} \leftarrow Fila$$

$\downarrow$

$Columna$

La matriz M tiene 3 filas y 4 columnas

$$N = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 0 \\ 9 & -1 \\ \sqrt{7} & 4 \end{bmatrix}$$

La matriz N tiene 4 filas y 2 columnas

En general:

$N°de\ fila$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow F1 \\ \rightarrow F2 \\ \rightarrow F3 \\ \vdots \\ \rightarrow Fm \end{matrix}$$

C1 C2 C3 Cn

$N°de\ columna$

Notación: $A = (a_{ij})_{m \times n}$

$Orden$

$número\ de\ columnas$

$número\ de\ filas$

$Elemento\ de\ la\ fila\ i, columna\ j$

MATRICES

ELEMENTO DE UNA MATRIZ (a_{ij})

Los elementos se ubican por fila y columna.
El elemento a_{ij} se ubica en la $fila\ i, columna\ j$

Ejemplo: Dada la matriz $A = (a_{ij})_{3\times3}$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & \pi \\ \sqrt{7} & -8 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Luego:

$a_{11} = -3$ $a_{12} = 4$ $a_{13} = \pi$

$a_{21} = \sqrt{7}$ $a_{22} = -8$ $a_{23} = 5$

$a_{31} = 0$ $a_{32} = 1$ $a_{33} = 2$

Aplicación: Encuentre la matriz $A = (a_{ij})_{3\times3}$ donde

$$a_{ij} = \begin{cases} ij & ; i \geq j \\ i - j & ; i < j \end{cases}$$

Como $A = (a_{ij})_{3\times3}$, se tiene:

$i < j$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$i \geq j$

MATRICES

MATRICES ESPECIALES

1) *Matriz rectangular*:

$$N° \; de \; filas \neq N° \; de \; columnas$$

Ejemplo:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 1 \\ \pi & \sqrt{5} & 7 & -9 \\ 4 & -2 & 5 & -7 \end{bmatrix}$$

- M tiene 3 filas y 4 columnas
- El orden de la matriz M es 3×4
- $M = (m_{ij})_{3\times4}$
- $M \in \mathbb{R}^{3\times4}$

2) *Matriz cuadrada*:

$$N° \; de \; filas = N° \; de \; columnas$$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & \pi \\ \sqrt{7} & -8 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Diagonal secundaria

Diagonal principal

- A tiene 3 filas y 3 columnas
- El orden de la matriz cuadrada A es 3
- $A = (a_{ij})_{3\times3}$
- $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$

MATRICES

3) *Matriz nula*:

$$a_{ij} = 0 \qquad \forall\, i, j$$

Ejemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nota:

- *La matriz nula puede ser rectangular o cuadrada*

4) *Matriz diagonal*:

Es una matriz cuadrada, donde se cumple:

$$a_{ij} = 0; \quad \forall\, i \neq j$$

Ejemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = diag(3; 0; \pi) \qquad B = diag(0; 0; 0)$$

Nota:

- *La matriz nula también es una matriz diagonal*

MATRICES

5) ***Matriz escalar***:

Es una matriz cuadrada, donde se cumple:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 \ ; \forall\, i \neq j \\ k \ ; \ i = j \end{cases} \quad ; k \in \mathbb{R}$$

Ejemplos:

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

6) ***Matriz identidad*** (I):

Es una matriz cuadrada, donde se cumple:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 \ ; \forall\, i \neq j \\ 1 \ ; \ i = j \end{cases}$$

Ejemplos:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_4$$

MATRICES

7) ***Matriz triangular superior***:

Es una matriz cuadrada, donde se cumple:

$$a_{ij} = 0 \ ; \forall \ i > j$$

Ejemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 & 9 \\ 0 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

8) ***Matriz triangular inferior***:

Es una matriz cuadrada, donde se cumple:

$$a_{ij} = 0 \ ; \forall \ i < j$$

Ejemplos:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

MATRICES

IGUALDAD DE MATRICES

Sean las matrices $A = (a_{ij})_{m\times n}$ y $B = (b_{ij})_{m\times n}$

entonces

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij} \; ; \forall\, i, j$$

Ejemplo:

Sean las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 5 & m & 4 \\ n & 8 & 6 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 3 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

son iguales, entonces:

$$m = 7 \quad \wedge \quad n = 3$$

OPERACIONES CON MATRICES

Adición:

Sean las matrices $A = (a_{ij})_{m\times n}$ y $B = (b_{ij})_{m\times n}$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n} \; ; \forall\, i, j$$

Ejemplo:

Sean las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 8 & 7 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

entonces

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 3 & 9 & 9 \end{bmatrix}$$

MATRICES

Multiplicación de matrices:

- **Multiplicación de un escalar por una matriz:**

Sea la matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ y k un número real

$$k.A = (k.a_{ij})_{m\times n}$$

Ejemplo:

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

entonces:

$$4A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 8 & 4 & 12 \end{bmatrix}$$

- **Multiplicación de una matriz fila por una matriz columna**

Sean las matrices $A = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]$ y $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

Se define su multiplicación como

$$A.B = [a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n]$$

Ejemplo:

Si $A = [2 \quad -1 \quad -2]$ y $B = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}$

entonces:

$$A.B = [\,(2)(-3) + (-1)(4) + (-2)(-6)]$$

$$A.B = [2]$$

MATRICES

- **Multiplicación de dos matrices:**

Sean las matrices $A = (a_{ij})_{m\times n}$ y $B = (b_{ij})_{n\times p}$

se define:

$$AB = (c_{ik})_{m\times p} \quad \text{tal que} \quad c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

Ejemplo:

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ entonces

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} [1 \quad -1]\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} & [1 \quad -1]\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} & [1 \quad -1]\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} \\ [2 \quad 0]\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} & [2 \quad 0]\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} & [2 \quad 0]\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Luego

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 8 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Nota:

Para poder multiplicar A por B, el número de columnas de A debe ser igual a la cantidad de filas de B

Si $A = (a_{ij})_{3\times 4}$; $B = (b_{ij})_{4\times 5}$ $\rightarrow$ $AB = (c_{ij})_{3\times 5}$

MATRICES

Ejemplo:

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Calcule A. B y B. A

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} = AB$$

Entonces:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Además:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix} = BA$$

Entonces:

$$BA = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Se nota que: $AB \neq BA$

MATRICES

Propiedades:

Siendo A y B matrices, tenemos

1) $A + B = B + A$

2) $(A + B) + C = A + (B + C)$

3) *En general* $AB \neq BA$

- *Si* $AB = BA$ *se dice que A y B son conmutables.*
- *Se cumple que* $AI = IA = A$ *donde I es la matriz identidad.*
- *Se cumple que* $A\Theta = \Theta A = \Theta$ *donde* Θ *es la matriz nula.*

4) $(A.B).C = A.(B.C)$

5) $(A + B).C = AC + BC$

6) $A(B + C) = AB + AC$

Ejemplos:

Indique verdadero (V) o falso (F) en cada caso.

1) *Si* $AB = \Theta \rightarrow A = \Theta \ \vee \ B = \Theta$

Es falso, puesto que

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\Theta}$$

2) *Si* $AB = AC \rightarrow B = C$

Es falso, puesto que $\Theta B = \Theta C = \Theta$

3) *Siendo A y B matrices cuadradas del mismo orden*

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

Es falso, puesto que

$$(A + B)^2 = (A + B)(A + B)$$

$$= AA + AB + BA + BB$$

$$= A^2 + AB + BA + B^2$$

Nota:

- *Si A y B son conmutables* $\rightarrow (A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

MATRICES

- **Potenciación de matrices:**

Si A es una matriz cuadrada, se define:

$$A^n = \underbrace{A.A.A\ldots A}_{n\ veces} \quad ; n \in \mathbb{N}$$

Además:

$$A^0 = I \qquad A^1 = A$$

- Donde I es la matriz identidad

Ejemplo:

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ calcule A^4

Luego:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A^2} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}}_{A^3} \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}}_{A^4}$$

$$\Rightarrow A^4 = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrices especiales

- **Matriz idempotente** $A^2 = A$
- **Matriz involutiva** $A^2 = I$, I es la matriz identidad
- **Matriz nilpotente** $A^m = \Theta$, Θ es la matriz nula

donde $m \in \mathbb{Z}^+$, m es el grado de nilpotencia.

PITAGORAS ACADEMIA

MATRICES

TRANSPUESTA DE UNA MATRIZ

Dada la matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ su transpuesta es A^T

definida por: $A^T = (a_{ji})_{n\times m}$

Es decir, se intercambiaron las filas por las columnas

Ejemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}_{3\times 3} \rightarrow B^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Propiedades:

1) $(A^T)^T = A$
2) $(k.A)^T = k.A^T \; ; \; k \in \mathbb{R}$
3) $(A+B)^T = A^T + B^T$
4) $(A.B)^T = B^T.A^T$
5) $(A^n)^T = (A^T)^n \; ; n \in \mathbb{N}$
6) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

Matrices especiales

- **Matriz simétrica**

$$A^T = A$$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 8 \\ 1 & -7 & 5 \\ 8 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

- **Matriz antisimétrica**

$$A^T = -A$$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 1 & 0 & 5 \\ -8 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

MATRICES

TRAZA DE UNA MATRIZ

Dada una matriz cuadrada A, su traza denotada por Traz(A) es la suma de los elementos de su diagonal principal.

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & \pi \\ \sqrt{7} & -1 & 6 \\ 0 & 3/2 & 5 \end{bmatrix}$

$$\text{Traz(A)} = -3 - 1 + 5 = 1$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Traz(B)} = 4 - 1 = 3$$

Propiedades:

Sean A y B matrices cuadradas del mismo orden, luego

1) $\text{Traz}(A^T) = \text{Traz(A)}$
2) $\text{Traz(k. A)} = \text{k. Traz(A)} \; ; \; k \in \mathbb{R}$
3) $\text{Traz(A + B)} = \text{Traz(A)} + \text{Traz(B)}$
4) $\text{Traz(A. B)} = \text{Traz(B. A)}$

Ejemplo: Se tiene $A^T = 2A + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$. Calcule Traz(A)

Tomando Traza en ambos lados

$$\underbrace{Traz\, A^T}_{} = \underbrace{Traz\, 2A}_{} + \underbrace{Traz \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}}_{}$$

$$Traz(A) = 2Traz(A) + 9 \rightarrow \boxed{Traz(A) = -9}$$

DETERMINANTE

DETERMINANTE

Es una función que aplicada a una matriz cuadrada, la transforma en un escalar.

Notación:

Sea A una matriz cuadrada, el determinante de A se representa por: $|A|$ o $Det(A)$

Luego: Det: $\mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$

$A \longrightarrow |A|$

Sabías que:

Al matemático y samurái Seki Kowa (1642-1708) se le da el crédito por la invención de los determinantes.

CÁLCULO DEL DETERMINANTE

- **Matriz de orden 1:**

Si $A = [a_{11}] \rightarrow |A| = a_{11}$

Ejemplos:

Si $A = [6] \rightarrow |A| = 6$

$B = [-2] \rightarrow |B| = -2$

- **Matriz de orden 2:**

Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow |A| = ad - bc$

Ejemplos:

1) Si $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = 5.2 - 3.7 = -11$

DETERMINANTE

2) Si $A = \begin{bmatrix} n & n+1 \\ n-1 & n \end{bmatrix}$

$\rightarrow |A| = n.n - (n-1)(n+1) = n^2 - (n^2-1)$

$\rightarrow |A| = n^2 - n^2 + 1 = 1$

$\rightarrow \boxed{|A| = 1}$

3) Si $A = \begin{bmatrix} cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}$

$\rightarrow |A| = cos\theta.cos\theta - (-sen\theta)sen\theta$

$\rightarrow |A| = cos^2\theta - (-sen^2\theta)$

$\rightarrow |A| = cos^2\theta + sen^2\theta = 1$

$\rightarrow \boxed{|A| = 1}$

- **Matriz de orden 3:** ***(Regla de Sarrus)***

Si $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix}$

$\rightarrow |A| = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$

Ejemplo:

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$\rightarrow |A| = 1.1.0 + 2.2.1 + 3.0.0 - 1.1.3 - 1.2.1 - 0.0.3$

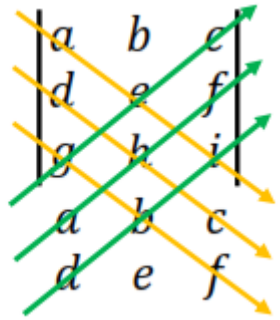
$\rightarrow |A| = 0 + 4 + 0 - 3 - 2 - 0$

$\rightarrow \boxed{|A| = -1}$

DETERMINATE

Otra forma:

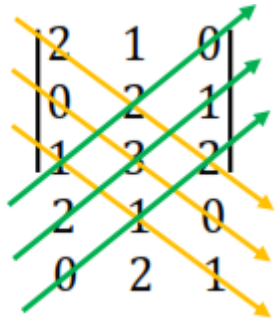
Si $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \rightarrow |A| =$



$\rightarrow |A| = aei + dhc + gbf - gce - ahf - dbi$

Ejemplo:

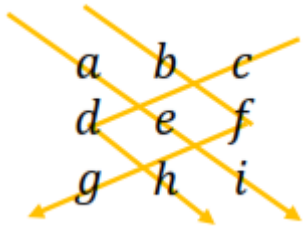
Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow |A| =$

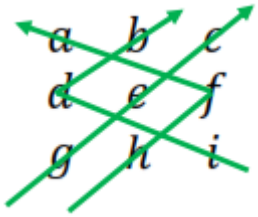


$\rightarrow |A| = 2.2.2 + 0.3.0 + 1.1.1 - 1.2.0 - 2.3.1 - 0.1.2$

$\rightarrow |A| = 8 + 0 + 1 - 0 - 6 - 0 \rightarrow \boxed{|A| = 3}$

Método de la estrella: Si $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

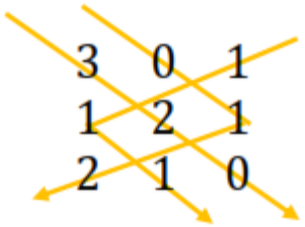


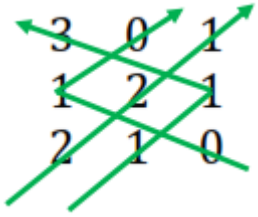


$\rightarrow |A| = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$

Ejemplo:

Si $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$





$\rightarrow |A| = 6 + 0 + 1 - 4 - 0 - 3 \rightarrow \boxed{|A| = 0}$

PITAGORAS ACADEMIA

DETERMINANTE

PROPIEDADES DEL DETERMINANTE

Solo para matrices cuadradas

(A; B; I: matriz identidad y 0: matriz nula)

1) $|I| = 1 \;;\; |0| = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

2) $|A^T| = |A|$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$$

3) Si una matriz tiene una fila nula (o columna nula), su determinante es cero

$$\begin{vmatrix} a & 0 & c \\ d & 0 & f \\ g & 0 & i \end{vmatrix} = 0$$

4) Si una matriz tiene dos filas (o columnas) iguales, su determinante es cero.

$$\begin{vmatrix} a & a & c \\ d & d & f \\ g & g & i \end{vmatrix} = 0$$

PITAGORAS ACADEMIA

DETERMINATE

5) Si dos filas (o columnas) son proporcionales, su determinante es cero.

$$\begin{vmatrix} a & ak & c \\ d & dk & f \\ g & gk & i \end{vmatrix} = 0$$

6) Si se intercambian dos filas (o columnas), el determinante cambia de signo.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

7) Si a una fila (o columna) se le suma (o resta) un múltiplo de otra fila (o columna), su determinante no se altera.

$$\begin{vmatrix} a+dk & b+ek & c+fk \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

8) Si los elementos de una fila (o columna) se multiplican por un escalar, su determinante queda multiplicado por dicho escalar.

$$\begin{vmatrix} ak & bk & ck \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = k. \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

DETERMINANTE

9) $|\alpha . A| = \alpha^n |A| \quad ; \; n = orden\ de\ A$

Si $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \rightarrow \alpha A = \begin{bmatrix} a\alpha & b\alpha & c\alpha \\ d\alpha & e\alpha & f\alpha \\ g\alpha & h\alpha & i\alpha \end{bmatrix}$

Luego

$$|\alpha . A| = \begin{vmatrix} a\alpha & b\alpha & c\alpha \\ d\alpha & e\alpha & f\alpha \\ g\alpha & h\alpha & i\alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \alpha^3 |A|$$

Entonces $|\alpha . A| = \alpha^3 |A|$

Donde el orden de la matriz A es 3.

10) El determinante de una matriz triangular (superior o inferior), es igual al producto de los elementos de su diagonal principal.

a) $\begin{vmatrix} 6 & \pi & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 36$ b) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ \pi & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 7 & 5 \end{vmatrix} = 20$

11) $|AB| = |A| . |B|$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 8 & 9 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = \left| \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 8 & 9 & 1 \end{bmatrix} \right|$$

$$\rightarrow |A| = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}}_{12} \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix}}_{10} = 120$$

DETERMINANTE

12) El determinante de una matriz antisimétrica de orden impar, es cero.

Sea A una matriz antisimétrica, así $A^T = -A$
donde orden(A) $= n$ (impar)
Tomando determinante en ambos miembros

$$\underbrace{|\ A^T\ |}_{|A|} = |-A\ | \ \rightarrow\ |A| = |-A|$$

luego: $|A| = |-A| = |\,(-1)\,A\,| = (-1)^n\,|A|$

como n es impar, entonces: $(-1)^n = -1$

Por tanto:

$$|A| = (-1)^n\,|A| = (-1)\,|A| = -|A|$$

$$\rightarrow\ 2|A| = 0\ \rightarrow\ \boxed{|A| = 0}$$

Ejemplo:

Matriz antisimétrica de orden 3 (impar)

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & -7 \\ -5 & 0 & 8 \\ 7 & -8 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Matriz antisimétrica de orden 5 (impar)

$$\begin{vmatrix} 0 & -3 & -5 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 7 & 1 & -7 \\ 5 & -7 & 0 & -9 & -8 \\ 0 & -1 & 9 & 0 & 6 \\ -4 & 7 & 0 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

DETERMINANTE

TEOREMA DE LAPLACE

- **Menor (M_{ij})**

Sea A una matriz de $n \times n$ y sea M_{ij} la matriz de orden $(n-1) \times (n-1)$ obtenida de A eliminando la fila i y columna j. M_{ij} se llama ***menor ij*** *de A.*

Ejemplo

Dada la matriz cuadrada

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -4 & -5 & 6 \\ 7 & -8 & -9 \end{bmatrix}$$

Entonces, el menor M_{13} es

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -4 & -5 & 6 \\ 7 & -8 & -9 \end{bmatrix} \leftarrow \text{Fila 1} \quad \Rightarrow \quad M_{13} = \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$$

Columna 3

Entonces, el menor M_{21} es

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -4 & -5 & 6 \\ 7 & -8 & -9 \end{bmatrix} \leftarrow \text{Fila 2} \quad \Rightarrow \quad M_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -8 & -9 \end{bmatrix}$$

Columna 1

DETERMINANTE

- **Cofactor**

Sea A una matriz de $n \times n$. El cofactor ij de A, denotado por A_{ij}, está dado por:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \left|M_{ij}\right|$$

Observación:

$$(-1)^{i+j} = \begin{cases} 1 & ; i+j \ \ es\ par \\ -1 & ; i+j \ \ es\ impar \end{cases}$$

Ejemplo

Dada la matriz cuadrada

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -4 & -5 & 6 \\ 7 & -8 & -9 \end{bmatrix}$$

Entonces, el cofactor A_{13} es

$$A_{13} = \underbrace{(-1)^{1+3}}_{1} |M_{13}| = \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 7 & -8 \end{vmatrix} = 67$$

Además, el cofactor A_{21} es

$$A_{21} = \underbrace{(-1)^{2+1}}_{-1} |M_{21}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -8 & -9 \end{vmatrix} = 6$$

DETERMINANTE

TEOREMA DE LAPLACE

Sea A una matriz de $n \times n$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Entonces el determinante de A, denotado por $|A|$ o $Det(A)$, está dado por:

$$Det(A) = |A| = a_{11}.A_{11} + a_{12}.A_{12} + a_{13}.A_{13} + \cdots + a_{1n}.A_{1n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k}$$

(Expansión por cofactores)

Observación:

La expansión por cofactores se puede realizar en cualquier fila o columna y no cambia el valor del determinante.

DETERMINANTE

Ejemplo

Calcule el valor del siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

Resolución

Realizamos la expansión por cofactores

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = a_{11}.A_{11} + a_{12}.A_{12} + a_{13}.A_{13}$$

$$= a_{11}.\underbrace{(-1)^{1+1}}_{1}|M_{11}| + a_{12}.\underbrace{(-1)^{1+2}}_{-1}|M_{12}| + a_{13}.\underbrace{(-1)^{1+3}}_{1}|M_{13}|$$

$$= + a_{11}.|M_{11}| - a_{12}.|M_{12}| + a_{13}.|M_{13}|$$

$$= + 1\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= + 1(-8) - 2(-12) + 3(-6)$$

$$= -8 + 24 - 18 = -2$$

Observación:

El signo $(-1)^{i+j}$ *se puede hallar por:*

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

DETERMINANTE

DETERMINANTE DE VANDERMONDE

Se tiene que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 9 & 25 \end{vmatrix} = (3-2)(5-2)(5-3) = 6$$

Aplicación:

Determine $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & b+1 \\ 1 & a^2+1 & b^2+1 \end{vmatrix}$

Resolución:

Por propiedades, tenemos:

$$\xrightarrow{C2 + C1(-1)} \xrightarrow{C3 + C1(-1)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ 1 & a^2 & b^2 \end{vmatrix}$$

Por la determinante de Vandermonde, nos queda:

$$(a-1)(b-1)(b-a)$$

DETERMINANTE

Matriz inversa

Sea A una matriz cuadrada, si existe una matriz B, del mismo orden que de A, tal que

$$AB = BA = I$$ siendo I la matriz identidad

Decimos que B es la inversa de A y lo denotaremos $B = A^{-1}$

Nota:

- Una matriz cuadrada es invertible si y solo si es no singular $(|A| \neq 0)$.
- No toda matriz es invertible.
- Si existe la matriz inversa, esta es única.
- A y A^{-1} son conmutables, por que

  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

  (considerando que exista la inversa)

Calculo de la matriz inversa

1. Para orden 2×2

Si A es una matriz no singular

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

A es una matriz invertible $\rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{-5}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

MATRICES

2. Para orden $n \times n$

Explicaremos los pasos a seguir con un ejemplo

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Formamos una matriz, cuyos elementos son los determinantes, que se obtiene al eliminar la fila y columna de cada elemento, como se muestra.

Luego asignamos signos alternados, empezando con positivo.

Finalmente le tomamos la transpuesta y le multiplicamos por el inverso de su determinante, para así hallar la matriz inversa.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^{T}$$

A esta matriz se le llama adjunta

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1/2 & -3/2 & 5/2 \end{pmatrix}$$

Matriz adjunta (Adj)

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\text{Adj}(A) \leftrightarrow \text{Adj}(A) = |A|A^{-1}$$

Siendo A una matriz invertible

Propiedades: Si A es invertible

$(A^{-1})^{-1} = A$	$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
$\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$	$\left(\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{T}\right)^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\right)^{T}$
$(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$	$\lvert A^{-1}\rvert = \lvert A\rvert^{-1} = \frac{1}{\lvert A\rvert}$
$\left(\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{n}\right)^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\right)^{n}$	$\left\lvert\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\right\rvert = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}$

MATRICES

Considerando A y B matrices invertibles de orden n, λ es un escala

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$\left(\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}\right)^{-1} = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}^{-1}$$

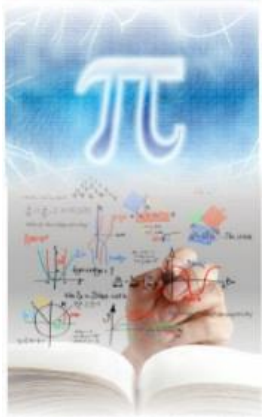
$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$$

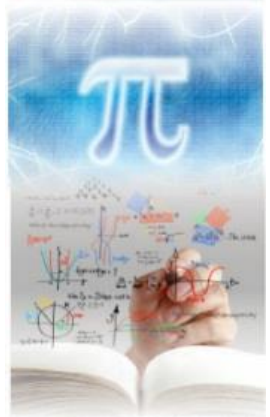
$$\left(7\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\right)^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}^{-1}$$

La matriz adjunta cumple propiedades muy similares que la inversa, ya que la adjunta es la inversa multiplicado por el escalar determinante

$\text{Adj}(A^T) = \text{Adj}(A)^T$	$\text{Adj}(A^n) = \text{Adj}(A)^n$
$\text{Adj}(AB) = \text{Adj}(B)\text{Adj}(A)$	$\text{Adj}(\lambda A) = \lambda^{n-1}\text{Adj}(A)$
$\text{Adj}(A^{-1}) = \text{Adj}(A)^{-1}$	$\lvert\text{Adj}(A)\rvert = \lvert A\rvert^{n-1}$

MOMENTO DE PRACTICAR





PROBLEMAS Y RESOLUCIÓN

MATRICES - DETERMINANTES

1. Se tiene la matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times3}$ tal que
$a_{ij} = \text{máx}\{i+j; ij\}$
Determine la suma de elementos de A.

A) 22 B) 23 C) 25
D) 18 E) 21

$$\therefore \sum elem(A) = 22$$

SOLUCION

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = máx(i + j: ij\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

MATRICES - DETERMINANTES

2. Si se tiene las matrices

$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & -2\end{pmatrix}$

calcule el resultado de $(A+B)^2-2AB$.

A) $\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 1 & -5\end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix}-4 & -3\\ -1 & -6\end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix}-4 & -3\\ 1 & 5\end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix}-4 & -3\\ -2 & -6\end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix}4 & -3\\ -1 & -7\end{pmatrix}$

SOLUCION

$$A+B=\begin{pmatrix}3 & 5\\ -4 & -4\end{pmatrix}$$

$$(A+B)^2=\begin{pmatrix}3 & 5\\ -4 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 5\\ -4 & -4\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow (A+B)^2=\begin{pmatrix}-11 & -5\\ 4 & -4\end{pmatrix}$$

Luego: $AB=\begin{pmatrix}-7 & -2\\ 5 & 2\end{pmatrix}$

Se pide: $(A+B)^2-AB=\begin{pmatrix}-11 & -5\\ 4 & -4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-7 & -2\\ 5 & 2\end{pmatrix}$

Finalmente: $(A+B)^2-2AB=\begin{pmatrix}-4 & -3\\ -1 & -6\end{pmatrix}$

MATRICES - DETERMINANTES

3. Sea el siguiente polinomio

$P_{(x)} = 2+3x+4x^2+5x^3$

y $A = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$

Calcule la traz$(P(A))$.

A) 7 B) 6 C) 4
D) 8 E) 2

SOLUCION

$P(A)=5A^3 + 4A^2 + 3A + 2I \ldots . (\propto)$

$A^3 = A^2 A \ldots . . (1)$

$$A^2 = A * A = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^3 = 0$$

En $(\propto)$

$$P(A) = 5^{*}\emptyset + 4 * \emptyset + 3\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P(A) = \begin{pmatrix} 20 & -27 \\ 12 & -16 \end{pmatrix}$$

$\therefore Traz(P) = 20 + (-16) = 4$

MATRICES - DETERMINANTES

4. Sean las matrices triangulares inferiores A y $B \in \mathbb{R}^{4\times4}$. Determine la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F) según corresponda.

I. A^T+B^T es una matriz triangular superior.

II. $\text{traz}(A\times B)=\sum_{i=1}^{4} a_{ii}b_{ii}$

III. $(A\times B)^3=A^3\times B^3$

A) VFV B) FFV C) VVF
D) VVV E) FFF

SOLUCION

MATRICES - DETERMINANTES

5. Sea la matriz $M=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ y el polinomio $P_{(x)}=1+x+x^2+x^3+...+x^{10}$. Calcule $P_{(M)}$.

A) $11I$ B) $11M$ C) $5(I+M)$
D) $I+11M$ E) $6I+5M$

SOLUCION

$$M^2=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow M^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

Por inducción : $M^3=M$

$M^4=I$

$M^5=M$

$M^6=I$

P(x)=$x^{10}+x^9+\cdots..x^2+x+1$

Luego:

P(M)=I+M+I+M+…..+I+M+I

P(M) = 5M+6i

MATRICES - DETERMINANTES

6. Sea A y $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrices conmutables tal que A es involutiva y B es idempotente. Calcule el equivalente de
$(A+B)(A-B)+(ABA)^5-(ABA)+B^7$

A) A B) B C) 0
D) I E) $-I$

SOLUCION

MATRICES - DETERMINANTES

7. Sea A una matriz cuadrada de orden 2. Sea X una matriz 2×1 no nula. Indique la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

I. $X^TA^TAX \geq 0$

II. Existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $A^TAX=\lambda X$ y $\lambda<0$.

III. Si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $A^TAX=\lambda X$, entonces una de las columnas de $\lambda I-A^TA$ es múltiplo de la otra.

A) FFV B) FVV C) VFF
D) VFV E) VVV

UNI 2020–I

SOLUCION

I. (Verdadero)

$$X^T\ A^T\ A\ X = (AX)^T(AX) \geq 0$$

II. (Falso)

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $A^T\ A\ X = \lambda\ X$, entonces, por (I),

$X^T(\lambda X) = X^T(A^TAX) \geq 0$. Luego, $\lambda \geq 0$

Así: $\forall\lambda \in \mathbb{R} : A^T\ A\ X = \lambda X \Rightarrow \lambda \geq 0$

III. (Verdadero)

Como $A^T\ A\ X = \lambda X$,
entonces $(\lambda I - A^T\ A)X = 0$.
Como $X \neq 0 \Rightarrow |\lambda I - AA^T| = 0$

$\therefore$ La respuesta es VFV.

MATRICES - DETERMINANTES

8. Si A y $B \in \mathbb{R}^{3\times3}$ tal que B es una matriz triangular superior de términos positivos, tal que

$A = B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 15 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$, calcule traz$(BB^T)$.

A) 51 B) 43 C) 52
D) 44 E) 27

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3x & 6y+xz \\ 0 & 4 & 7z \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 15 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} \rightarrow x = 3; z = 1; y = 2$$

Luego: $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $se\ pide: BB^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

SOLUCION

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 15 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 2 & z \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow B^2 = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 2 & z \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 2 & z \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$BB^t = \begin{pmatrix} 14 & \square & \square \\ \square & 5 & \square \\ \square & \square & 25 \end{pmatrix}$$

$$\therefore Traz(BB^t) = 44$$

MATRICES - DETERMINANTES

9. Determine la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F) según corresponda, tal que A y $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

I. Si A es idempotente, entonces $A^n = A \ \forall\, n \in \mathbb{Z}^+$.

II. Si A es involutiva, entonces $A^{2n-1} = A \wedge A^{2n} = I \ \forall\, n \in \mathbb{Z}^+$.

III. Si A y B son conmutables, entonces $(A-B)(A^2+AB+B^2) = A^3 - B^3$

A) VVV B) VFV C) FFV
D) FFF E) VVF

SOLUCION

I) A es idempotente $\rightarrow A^2 = A$ ….(∝)

$$AA^2 = AA \rightarrow A^3 = A^2 = A \rightarrow A^3 = A$$

$$AA^3 = AA \rightarrow A^4 = A^2 = A \rightarrow A^4 = A \ldots\ldots (V)$$

II) A es involutiva $\rightarrow A^2 = I$ ……(∝)

$$AA^2 = IA \rightarrow A^3 = A$$

$$AA^3 = AA \rightarrow A^4 = A^2 = I \rightarrow A^4 = I$$

$$AA^4 = IA \rightarrow A^5 = A \qquad (V)$$

III) A y B son conmutables $\rightarrow AB = BA$

Luego: (A-B)$(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3$

$$A^3 + A^2B + AB^2 - BA^2 - BAB - B^3 = A^3 + AAB + ABB - BA^2 - BAB - B^3$$

$$(A\text{-}B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 + ABA + BAB - BAA - BAB - B^3$$

$$(A\text{-}B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 + BAA - BAA - B^3$$

$$\rightarrow (A\text{-}B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3 \quad (V)$$

MATRICES - DETERMINANTES

10. Si A es una matriz idempotente tal que $A+B=I$, calcule el equivalente de $ABA-BA+2A^2-B$.

A) A B) I C) 0
D) B E) $A+I$

SOLUCION

A es idempotente → $A^2 = A$ y $A + B = I$

E=ABA - BA + 2A - B

E=ABA -(I-A)A + 2A -(I-A)

E=ABA -A + A^2 + 2A − I + A

E=ABA +3A - I

E=A(I-A)A + 3A - I

E=A(A-A^2) + 3A − I

E=3A-I=3A-(A+B)=2A-B

MATRICES - DETERMINANTES

11. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & m \\ n & 3 \end{pmatrix}$ y $P_{(x)}=x^2-5x+6$

Calcule $|P(A)|$.

A) mn B) m C) n
D) m^2 E) m^2n^2

SOLUCION

$P(A)=A^2-5A+6I$

$P(A)=(A-3I)(A-2I)$

$|P(A)|=|A-3I||A-2I|$

$A-3I=\begin{pmatrix} -1 & m \\ n & 0 \end{pmatrix}$ y $A-2I=\begin{pmatrix} 0 & m \\ n & 1 \end{pmatrix}$

$|A-3I|=0(-1)-mn=-mn$ y $|A-2I|=0-mn=-mn$

Finalmente: $|P(A)|=(-mn)(-mn)=m^2n^2$

MATRICES - DETERMINANTES

12. Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}3 & 5 & 1\\ 0 & 2 & 7\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}0 & 3 & -2\\ -3 & 0 & -5\\ 2 & 5 & 0\end{pmatrix}$$

Calcule $|A^T|+|B^3|$.

A) 15 B) 20 C) 17
D) 12 E) 10

SOLUCION

$$|A^T| = |A| = 3 * 2 * 2 = 12$$

$$|B^3| = |B|^3 = 0^3 = 0$$

B es antisimétrica y de orden impar

Finalmente: $|A^t|+|B^3| = 12 + 0 = 12$

MATRICES - DETERMINANTES

13. Calcule el determinante de $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ si sus elementos se definen de la forma siguiente:
$a_{ij} = \text{máx}(i, j)$

A) 2 B) 3 C) 0
D) 4 E) 1

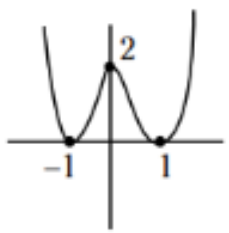
SOLUCION

MATRICES - DETERMINANTES

14. Determine la gráfica de f si

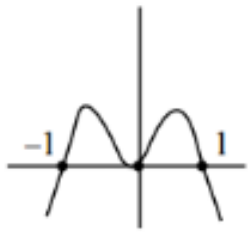
$$f_{(x)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x^2 & x^3 \\ x^2 & x^4 & x^6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & -\cos x \\ \cos x & \operatorname{sen} x \end{vmatrix}$$

A)

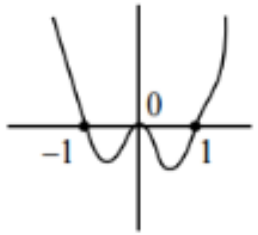


C)

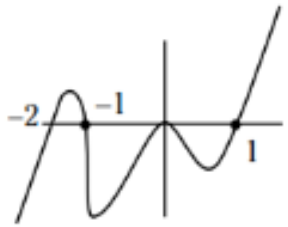
B)



D)



E)



SOLUCION

MATRICES - DETERMINANTES

15. Determine la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F) según corresponda.

I. $|AB^T| = |BA^T|$

II. $\|A|A| = |A|^2$

III. Toda matriz idempotente tiene determinante cero o uno.

A) VVV B) VVF C) VFF
D) VFV E) FFF

SOLUCION

MATRICES - DETERMINANTES

16. Se tiene

$$A=(a_{ij})_{2\times 3};\ a_{ij}=\begin{cases} i-j;\ \text{si } i<j \\ 2i-j;\ \text{si } i\geq j \end{cases}$$

Calcule el valor de $|AA^T|$.

A) 75 B) 81 C) 59
D) 77 E) 65

SOLUCION

MATRICES - DETERMINANTES

17. Se tiene la siguiente igualdad entre las matrices:
$(A^T B + X)A = A^T A^2$
tal que A, B y X son matrices cuadradas del mismo orden. Determine $|XA^T|$.

A) $|A-B|$
B) $|A|\,|B-A|$
C) $|B|\,|A-B|$
D) $|A|^2|A-B|$
E) $|B|^2|A-B|$

SOLUCION

FIN DE LA SESIÓN

PRACTICA Y APRENDERÁS